LE CRIBLE D'ERATOSTHENE ET LE THEOREME DE GOLDBACH

LE CRIBLE D'ERATOSTHÈNE ET LE THÉORÈME DE GOLDBACH

PAR

VIGGO BRUN

AVEC 8 FIGURES DANS LE TEXTE

(VIDENSKAPSSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1920. No. 3)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA
EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD
1920

LE CRIBLE D'ERATOSTHÈNE ET LE THÉORÈME DE GOLDBACH

PAR

VIGGO BRUN

AVEC 8 FIGURES DANS LE TEXTE

(VIDENSKAPSSELSKAPETS SKRIFTER. I. MAT.-NATURV. KLASSE. 1920. No. 3)

UTGIT FOR FRIDTJOF NANSENS FOND

KRISTIANIA

EN COMMISSION CHEZ JACOB DYBWAD

1920



Fremlagt i den mat.-naturv. klasses møte den 24de januar 1919 av prof. C. Størmer.

A. W BRØGGERS BOKTRYKKERI A/S

§ 1.

Le théorème de Goldbach est bien connu: On peut écrire tout nombre pair comme la somme de deux nombres premiers. Euler dans une lettre de 1742 a écrit: »Ich halte dies für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstrieren kann.« Ce théorème n'a pas encore été prouvé, et il en est de même du théorème suivant: La suite des »nombres premiers jumeaux«[1] est illimitée. E. Landau dans un discours, fait au congrés international des mathématiciens à Cambridge en 1912, a dit qu'il tient ces problèmes pour »unangreifbar beim gegenwärtigen Stande der Wissenschaft«.

On a pourtant maintenant un point de départ pour le traitement de ces problèmes, après qu'on a découvert que les nombres premiers de Goldbach et les nombres premiers jumeaux peuvent être déterminés par une méthode analogue à celle d'Eratosthène. Le premier qui ait attiré l'attention sur ce fait est Jean Merlin[2].

La méthode consiste en un emploi double du crible d'Eratosthène. Soit p. ex. à décomposer le nombre pair 26. Nous écrivons les deux suites de nombres suivantes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Les nombres premiers au-dessous de $\sqrt{26}$ sont 2, 3 et 5. Alors nous effaçons les nombres de la forme 2λ et 3λ et 5λ dans nos deux suites. La somme d'un nombre de la première ligne et le nombre immédiatement au-dessous de la deuxième ligne est 26. Si ces deux nombres sont non-

[1] C'est-à-dire les couples des nombres premiers ayant la différence 2. Voir P. Stäckel dans „Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie, Abt. A, Jahrg. 1916, 10 Abh.

[2] Voir Bulletin des Sciences mathématiques T. 39, 1 partie, 1915. Voir aussi Viggo Brun dans „Archiv for Mathematik og Naturvidenskab" 1915, B. 34, nr. 8: „Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare."

effacés, ils sont nombres premiers, et donnent alors une décomposition goldbachienne de 26. Il n'est pas nécessaire d'écrire la deuxième suite. On peut seulement choisir comme points de départ des effacements les nombres 26 et 0 de la première suite. Par cette méthode nous obtenons toutes les décompositions d'un nombre pair x dans une somme de deux nombres premiers, situés entre $\sqrt{x}$ et $x - \sqrt{x}$. En choisissant comme points de départ $+0$ et 2 nous pourrons déterminer les nombres premiers jumeaux. Nous ne savons pas, si un traitement de cette méthode pourra conduire à une démonstration de ces théorèmes; mais nous verrons que la méthode peut au moins conduire à des résultats bien profonds.

§ 2.

Etudions d'abord la méthode d'Eratosthène, en lui donnant la forme suivante:

Soient données les séries:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	 x
0		2		4		6		8		10	. . . .
0			3			6			9		. . . .
0					5					10	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . .
0		p_n			$2p_n$			$3p_n$			λp_n

où x désigne un nombre entier et p_n le nombre premier n-ième:

$$p_n \leqq \sqrt{x} < p_{n+1}$$

et λ un nombre entier:

$$\lambda p_n \leqq x < (\lambda + 1) p_n .$$

Les termes de la première série, qui sont différents de tous les termes des autres séries, sont les nombres premiers situés entre $\sqrt{x}$ et x et le nombre 1.

Ce sont les termes non-effacés du crible d'Eratosthène. Généralisons, en étudiant les séries arithmétiques suivantes:

Δ	$\Delta + D$	$\Delta + 2D$	$\Delta + 3D$	$\Delta + 4D$	. . . . .
a_1	$a_1 + p_1$	$a_1 + 2p_1$	$a_1 + 3p_1$	$a_1 + 4p_1$	. . . . .
a_2	$a_2 + p_2$	$a_2 + 2p_2$	$a_2 + 3p_2$	$a_2 + 4p_2$	. . . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . . . .
a_{r-1}	$a_{r-1} + p_{r-1}$	$a_{r-1} + 2p_{r-1}$	$a_{r-1} + 3p_{r-1}$	$a_{r-1} + 4p_{r-1}$	. . . . .
a_r	$a_r + p_r$	$a_r + 2p_r$	$a_r + 3p_r$	$a_r + 4p_r$	. . . . .

Les séries s'étendent de 0 à x. D désigne un nombre entier, premier avec les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_r$ (successifs ou non, mais différents).

$\varDelta$ et $a_1, a_2, \ldots a_r$ sont des nombres entiers:

$$0 < \varDelta \leqq D$$
$$0 < a_i \leqq p_i.$$

Nous posons le problème suivant:

Combien la première ligne contient-elle de termes différents de tous les termes des autres lignes?

Nous désignerons ce nombre par

$$N(\varDelta, D, x, a_1, p_1, a_2, p_2, \ldots a_r, p_r)$$

ou souvent plus brièvement par

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r).$$

Nous obtenons la formule fondamentale:

$$N(\varDelta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_r, p_r)$$
$$= N(\varDelta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_{r-1}, p_{r-1}) - N(\varDelta', D\cdot p_r, x, a_1, p_1, \ldots a_{r-1}, p_{r-1})$$

où

$$0 < \varDelta' \leqq D\cdot p_r$$

ou plus brièvement:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) =$$
$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1}) - N(D\cdot p_r, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1}) \qquad (1)$$

en étudiant d'abord nos séries arithmétiques jusqu'à la série $a_{r-1} + \lambda p_{r-1}$, et en ajoutant alors la série $a_r + \lambda p_r$. Supposerons connu $N(\varDelta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_{r-1}, p_{r-1})$. Nous en déduissons $N(\varDelta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_r, p_r)$ en soustraissant le nombre des termes de la dernière série, qui sont identiques aux termes de la première série, mais non-identiques aux termes des séries intermédiaires.

Nous voyons que ce nombre est égal à $N(\varDelta', D\cdot p_r, x, a_1, p_1, \ldots p_{r-1})$ en remarquant, que les termes de la dernière série $a_n + \lambda p_n$ qui sont identiques aux termes de la première série $\varDelta + \mu\cdot D$ sont les termes entre 0 et x de la série arithmétique:

$$\varDelta' \quad \varDelta' + D\cdot p_r \quad \varDelta' + 2D\cdot p_r \quad \varDelta' + 3D\cdot p_r \quad \varDelta' + 4D\cdot p_r \ldots\ldots$$

où

$$0 < \varDelta' \leqq D\cdot p_r$$

$\varDelta'$ étant le terme positif, le plus petit de la série.

L'équation indéterminée

$$a_r + \lambda p_r = \Delta + \mu D$$

ou

$$p_r \lambda - D\mu = \Delta - a_r$$

a, comme on sait, toujours des résolutions, parce que p_r et D sont premiers entre eux. Les résolutions sont:

$$\lambda = \lambda_0 + t \cdot D$$
$$\mu = \mu_0 + t \cdot p_r$$

quand λ_0, μ_0 sont des résolutions et quand t parcourt les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Les termes de la dernière série qui sont identiques aux termes de la première série sont alors tous les termes

$$a_r + \lambda p_r = a_r + \lambda_0 p_r + tD \cdot p_r \quad \text{où} \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Ce sont les termes d'une série arithmétique, ayant la difference $D \cdot p_r$.

Nous définissons spécialement $N(\Delta, D, x)$ ou brièvement $N(D, x)$ comme le nombre des termes entre 0 et x de la série

$$\Delta \quad \Delta + D \quad \Delta + 2D \quad \Delta + 3D \ldots \Delta + \lambda D$$

où

$$0 < \Delta < D$$
$$\Delta + \lambda D \leqq x < \Delta + (\lambda + 1) D.$$

Nous en déduissons

$$\lambda + 1 = N(D, x) = \frac{x}{D} + \theta \qquad \text{où} \qquad -1 < \theta < 1.$$

Nous donnerons un exemple en choisissant:

$\Delta = 2 \quad D = 7 \quad x = 60 \quad a_1 = 2 \quad p_1 = 2 \quad a_2 = 1 \quad p_2 = 3 \quad a_3 = 4 \quad p_3 = 5$

(A) 2 (9) 16 23 30 37 (44) 51 58

(B) 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28 30 32 34 36 38 40 42 44 46 48 50 52 54 56 58 60

(C) 1 4 7 10 13 16 19 22 25 28 31 34 37 40 43 46 49 52 55 58

(D) 4 9 14 19 24 29 34 39 44 49 54 59

Les nombres de (A) qui sont différents des nombres de (B) et (C) sont 9, 23, 51. Ajouterons alors la série (D). Les nombres identiques de (A) et (D) sont 9 et 44, ayant la différence 7·5. Nous obtenons alors:

$$N(7, 60, 2, 3, 5) = N(7, 60, 2, 3) - N(7 \cdot 5, 60, 2, 3)$$

ou

$$2 \quad = \quad 3 \quad - \quad 1$$

De la formule (1) nous déduissons les suivantes:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = N(D, x) - N(D \cdot p_1, x) - N(D \cdot p_2, x, p_1) - N(D \cdot p_3, x, p_1, p_2) - \ldots - N(D \cdot p_r, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1}) \qquad (2)$$

et

$$\begin{aligned} & N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = \\ & N(D, x) - N(D \cdot p_1, x) - N(D \cdot p_2, x) - \ldots - N(D \cdot p_r, x) \\ & + N(D \cdot p_2 \cdot p_1, x) \\ & + N(D \cdot p_3 \cdot p_1, x) + N(D \cdot p_3 \cdot p_2, x, p_1) \\ & + N(D \cdot p_4 \cdot p_1, x) + N(D \cdot p_4 \cdot p_2, x, p_1) + N(D \cdot p_4 \cdot p_3, x, p_1, p_2) \qquad (3) \\ & + \ldots \\ & + \ldots \\ & + N(D \cdot p_r \cdot p_1, x) + N(D \cdot p_r \cdot p_2, x, p_1) + N(D \cdot p_r \cdot p_3, x, p_1, p_2) + \ldots + \\ & \qquad + N(D p_r \cdot p_{r-1}, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-2}). \end{aligned}$$

Nous donnons à la dernière formule la forme plus courte:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1, p_2, \ldots p_{b-1}) \qquad (3')$$

Quand il s'agit de déterminer une limite inférieure de $N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r)$, nous pouvons écarter tant de termes positifs dans la formule (3) que nous voulons. On peut choisir ces termes de plusieurs manières différentes[1] p. ex. les termes qui se trouvent à droite d'une ligne verticale. En général nous obtenons la formule:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \sum\sum_{\omega_1} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1, p_2, \ldots p_{b-1}) \qquad (4)$$

où nous avons choisi pour $p_a \cdot p_b$ un domaine ω_1 qui se trouve à l'intérieur du domaine suivant:

$$\begin{array}{lllll} p_2 \cdot p_1 & & & & \\ p_3 \cdot p_1 & p_3 \cdot p_2 & & & \\ p_4 \cdot p_1 & p_4 \cdot p_2 & p_4 \cdot p_3 & & \\ \ldots & & & & \\ \ldots & & & & \\ p_r \cdot p_1 & p_r \cdot p_2 & p_r \cdot p_3 & \ldots & p_r \cdot p_{r-1} \end{array}$$

[1] Voir: „Nyt tidsskrift" 1918: Une formule exacte pour la détermination du nombre des nombres premiers au-dessous de x, etc. par Viggo Brun.

En employant la formule (4) deux fois nous obtenons la formule nouvelle:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > N(D, x) - \sum_{a \leqq r} N(D \cdot p_a, x) +$$

$$+ \sum\sum_{\omega_1} \Big(N(D \cdot p_a \cdot p_b, x) - \sum_{c < b} N(D \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c, x) \Big) +$$

$$+ \sum\sum_{\omega_1'} \sum\sum_{\omega_2} N(D \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d, x, p_1, p_2, \ldots p_{d-1})$$

où

$$\omega_1' \gtreqless \omega_1$$

et où ω_2 désigne le domaine de $p_c \cdot p_d$.

En continuant et en nous servant de

$$N(d, x) = \frac{x}{d} + \theta \qquad \text{où} \qquad -1 < \theta < 1$$

nous obtenons à la fin la formule générale:

$$\frac{D}{x} N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > 1 - \sum_{a \leqq r} \frac{1}{p_a} + \sum\sum_{\omega_1} \frac{1}{p_a p_b} \Big(1 - \sum_{c < b} \frac{1}{p_c} \Big) +$$

$$+ \sum\sum_{\omega_1'} \sum\sum_{\omega_2} \frac{1}{p_a p_b p_c p_d} \Big(1 - \sum_{e < d} \frac{1}{p_e} \Big) + \ldots - \frac{R \cdot D}{x} \tag{5}$$

où R désigne le nombre des termes, et où

$$\omega_1' \gtreqless \omega_1 \qquad \text{etc.}$$

Nous pouvons aussi donner à la formule (5) la forme suivante, en supposant spécialement $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ etc.:

$$N(D, x, 2, 3, 5, \ldots p_r) > \frac{x}{D} \Big[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \cdots\cdots - \frac{1}{p_r}$$

$$+ \frac{1}{3 \cdot 2}$$

$$+ \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3} \Big(1 - \frac{1}{2} \Big)$$

$$+ \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 3} \Big(1 - \frac{1}{2} \Big) + \frac{1}{7 \cdot 5} \left(\begin{matrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \end{matrix} \right)$$

$$+ \frac{1}{11 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 3} \Big(1 - \frac{1}{2} \Big) + \frac{1}{11 \cdot 5} \left(\begin{matrix} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \end{matrix} \right) + \frac{1}{11 \cdot 7} \left(\begin{matrix} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \\ + \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3} \Big(1 - \frac{1}{2} \Big) \end{matrix} \right)$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{p_r\cdot 2}+\frac{1}{p_r\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{p_r\cdot 5}\left(\begin{matrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\end{matrix}\right)+\frac{1}{p_r\cdot 7}\left(\begin{matrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\\ +\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\end{matrix}\right)+\dots\Bigg]-R$$

où l'on peut écarter chaque terme (la parenthèse suivante comprise), qui suit au signe $+$.

R désigne le nombre des termes employés.

Nous obtenons la meilleure limite inférieure de N, quand nous écartons ces termes qui, multipliés par $\frac{x}{D}$, sont plus petits que le nombe des termes employés.

Nous donnons un exemple en choisissant $x = 1000$ et $D = 1$ et $p_r = 31$, qui est le nombre premier le plus grand au-dessous de $\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}N(1, 10^3, 2, 3, \dots 31) > 10^3\Bigg[1 &- \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\dots\dots-\frac{1}{29}-\frac{1}{31}\\
&+\frac{1}{3\cdot 2}\\
&+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{7\cdot 2}+\frac{1}{7\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}\right)\\
&+\frac{1}{11\cdot 2}+\frac{1}{11\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{11\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}\right)\\
&+\frac{1}{13\cdot 2}+\frac{1}{13\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{13\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}\right)\\
&+\frac{1}{17\cdot 2}+\frac{1}{17\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{19\cdot 2}+\frac{1}{19\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{23\cdot 2}+\frac{1}{23\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{29\cdot 2}+\frac{1}{29\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&+\frac{1}{31\cdot 2}+\frac{1}{31\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\Bigg]-52\end{aligned}$$

Nous avons écarté le terme $\frac{1}{17\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}\right)=0{,}0039\dots$ puisque $10^3\cdot 0{,}0039\dots = 3{,}9\dots$ est plus petit que 4, le nombre des termes

employés. Dans le terme $\frac{1}{11\cdot 7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right)$ il faut d'abord écarter $\frac{1}{5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$ puisque $\frac{10^3}{11\cdot 7\cdot 5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0,4\ldots$ est plus petit que 2, mais il faut aussi écarter le terme $\frac{1}{11\cdot 7}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right.$ $\left.+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 2}\right) = 0,003\ldots$ puisque $10^3\cdot 0,003\ldots = 3,\ldots$ est plus petit que 6.

Nous obtenons alors:

$$N(1, 10^3, 2, 3, \ldots 31) > 109 - 52 = 57.$$

Nous pouvons exprimer ce résultat de la manière suivante:

Quand nous effaçons parmi 1000 nombres tous les deux, tous les trois, tous les cinq, jusqu'à tous les 31, il restera toujours au moins 57 nombres. De là nous déduisons spécialement qu'il existe plus que 56 nombres premiers entre 31 et 1000, en observant que

$$N(1, 10^3, 2, 3, \ldots 31) = \pi(10^3) - \pi(\sqrt{10^3}) + 1$$

quand nous choisissons 0 comme point de départ des effacements.

Ici $\pi(x)$ désigne le nombre des nombres premiers au-dessous de x.

Ici nous avons choisi les domaines ω de façon d'obtenir la limite inférieure la plus convenable. Si nous choisissons les domaines ω par le même principe, nous trouvons

$N(1, 10^3, 2, 3, \ldots 31) > 109 - 52 = 57$

tandis que $\pi(10^3) - \pi(\sqrt{10^3}) + 1 = 158$

$N(1, 10^4, 2, 3, \ldots 97) > 820 - 284 = 536$

tandis que $\pi(10^4) - \pi(\sqrt{10^4}) + 1 = 1206$

$N(1, 10^5, 2, 3, \ldots 313) > 5733 - 1862 = 3871$

tandis que $\pi(10^5) - \pi(\sqrt{10^5}) + 1 = 9528$

Nous voulons dans la suite choisir les domaines ω par des principes plus simples. Pour illustrer les principes suivis nous donnerons d'abord trois exemples:

Ex. 1)

$$N(1, x, 2, 3, 5, 7) > x\left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right.$$
$$+\frac{1}{3\cdot 2}$$
$$+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{5\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$
$$\left.+\frac{1}{5\cdot 2}+\frac{1}{7\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{7\cdot 5}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot 2}\right)\right]-16$$
$$= x\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\right]-24$$

Nous n'avons ici écarté aucun terme.

Ex. 2) $N(1, x, 2, 3, 5, 7, 11) > x \Bigg[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11}$

$+ \frac{1}{3 \cdot 2}$

$+ \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$+ \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7 \cdot 5}\left[\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \end{array}\right]$

$+ \frac{1}{11 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{11 \cdot 5}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \end{array}\right) + \frac{1}{11 \cdot 7}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \\ + \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \end{array}\right) \Bigg] - 26$

où les termes écartés sont ajoutés en petit. On peut aussi écrire:

$N(1, x, 2, 3, 5, 7, 11) > x \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right) - \right.$

$\left. - \left(\frac{1}{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2} + \frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}\right) \right] -$

$- \left(1 + 5 + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) = x[0{,}2078 - 0{,}0121 + 0{,}0004] - 26 = 0{,}1961\, x - 26$

Ici nous avons écarté tous termes de la forme $\frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d}$ et de la forme $\frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d \cdot p_e}$.

Ex. 3) $N(1, x, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) >$

$x \left[1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \right.$

$+ \frac{1}{3 \cdot 2}$

$+ \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1}{5 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$

$+ \frac{1}{7 \cdot 2} + \frac{1}{7 \cdot 3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{7 \cdot 5}\left[\begin{array}{l} 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ + \frac{1}{3 \cdot 2} \end{array}\right]$

$$+\frac{1}{11\cdot 2}+\frac{1}{11\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{11\cdot 5}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\end{bmatrix}+\frac{1}{11\cdot 7}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\\ +\frac{1}{5\cdot 2}\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{13\cdot 2}+\frac{1}{13\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{13\cdot 5}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\end{bmatrix}+\frac{1}{13\cdot 7}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\Big|\\ +\frac{1}{5\cdot 2}\Big|\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{17\cdot 2}+\frac{1}{17\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{17\cdot 5}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\end{bmatrix}+\frac{1}{17\cdot 7}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\Big|\\ +\frac{1}{5\cdot 2}\Big|\end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{19\cdot 2}+\frac{1}{19\cdot 3}\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{19\cdot 5}\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\end{bmatrix}+\frac{1}{19\cdot 7}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\\ +\frac{1}{3\cdot 2}\Big|\\ +\frac{1}{5\cdot 2}\Big|\end{pmatrix}\Bigg]-72$$

$$=0{,}163\,x-72$$

Ici nous avons écarté les termes à droite des lignes verticales. On voit que l'expression est de la forme

$$1-\Sigma\frac{1}{p_a}+\Sigma\Sigma\frac{1}{p_a\cdot p_b}-\Sigma\Sigma\Sigma\frac{1}{p_a\cdot p_b\cdot p_c}+\Sigma\Sigma\Sigma\Sigma\frac{1}{p_a\cdot p_b\cdot p_c\cdot p_d}$$

où p_a, p_b, p_c et p_d parcourent les valeurs suivantes:

p_a	2	3	5	7	11	13	17	19
p_b	2	3	5	7				
p_c	2	3	5	7				
p_d	2							

quand

$$a>b>c>d\,.$$

§ 3.

Étudions d'abord la méthode employée à l'exemple 2.

Nous ne nous servons de la formule générale (5), mais déduisons directement de la formule (3'):

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1, p_2, \ldots p_{b-1})$$

En employant cette formule deux fois nous obtenons:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1, \ldots p_{b-1}) - \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} \sum_{c < b} N(D \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} \sum_{c < b} \sum_{d < c} N(D p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d, x, p_1, \ldots p_{d-1}) \qquad (6)$$

La dernière somme est positive (ou 0). En nous servant de

$$N(d, x) = \frac{x}{d} + \theta \qquad \text{où} \qquad -1 \leq \theta \leq 1$$

nous en concluons:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > \frac{x}{D} \left[1 - \sum_{a \leq r} \frac{1}{p_a} + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} \frac{1}{p_a \cdot p_b} - \right. \\ \left. - \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} \sum_{c < b} \frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c} \right] - R \qquad (7)$$

ou plus brièvement:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > \frac{x}{D} \left[1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 \right] - R \qquad (7')$$

où Σ_1 est égal à la somme des termes de la première des trois lignes suivantes

$$\begin{array}{l} \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_{r-1}} + \frac{1}{p_r} = \sigma \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_{r-1}} + \frac{1}{p_r} \qquad (A) \\ \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \ldots + \frac{1}{p_{r-1}} + \frac{1}{p_r} \end{array}$$

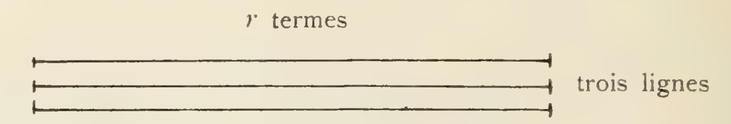
Σ_2 est égal à la somme des termes formés par multiplication de chaque terme de la première ligne par ces termes de la deuxième ligne, qui sont situés à gauche de ce terme. Σ_3 peut être défini analoguement.

Nous voulons dire, dans la suite, que nous calculons l'expression

$$1-\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3$$

au moyen du schéma (A) ou plus brièvement au moyen du schéma:

r termes



Comparons Σ_2 et σ^2:

$$\sigma^2=\left(\frac{1}{p_1}\right)^2+\left(\frac{1}{p_2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{p_{r-1}}\right)^2+\left(\frac{1}{p_r}\right)^2+2\Sigma_2>2\Sigma_2$$

ou

$$\sigma\cdot\Sigma_1>2\Sigma_2$$

Nous voulons aussi démontrer que

$$\sigma\cdot\Sigma_2>3\Sigma_3$$

ou

$$\left(\sum_{c\leq r}\frac{1}{p_c}\right)\cdot\left(\sum_{a\leq r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a\cdot p_b}\right)>3\left(\sum_{a\leq r}\sum_{b<a}\sum_{c<b}\frac{1}{p_a\cdot p_b\cdot p_c}\right)$$

Un terme quelconque $\frac{1}{p_\alpha\cdot p_\beta\cdot p_\gamma}$, où $\gamma<\beta<\alpha\leq r$, est représenté une fois dans Σ_3 mais, comme nous verrons, trois fois dans $\sigma\cdot\Sigma_2$.

Cherchons d'abord $\frac{1}{p_\alpha}$ dans $\sum_{c\leq r}\frac{1}{p_c}$ et $\frac{1}{p_\beta\cdot p_\gamma}$ dans $\sum_{a\leq r}\sum_{b<a}\frac{1}{p_a\cdot p_b}$

et alors $\frac{1}{p_\beta}$ » — » $\frac{1}{p_\alpha\cdot p_\gamma}$ » — » —

et à la fin $\frac{1}{p_\gamma}$ » — » $\frac{1}{p_\alpha\cdot p_\beta}$ » — » —

Le terme $\frac{1}{p_\alpha\cdot p_\beta\cdot p_\gamma}$ est donc representé trois fois dans $\sigma\cdot\Sigma_2$, qui contient aussi termes de la forme $\frac{1}{p_\alpha^2\,p_\beta}$ etc. Nous en concluons que

$$\sigma\cdot\Sigma_2>3\Sigma_3$$

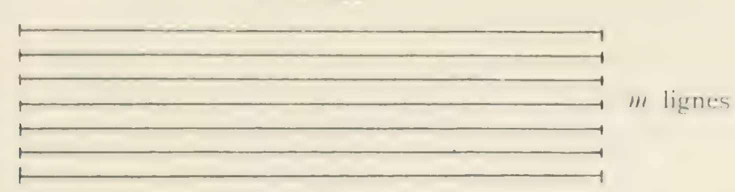
Nous pouvons généraliser la formule (7) en calculant la dernière somme dans (6) au moyen de (6). En continuant nous obtenons une formule analogue à (7) ou plus brièvement analogue à (7'):

$$N(D,x,p_1,p_2,\ldots p_r)>\frac{x}{D}\left[1-\Sigma_1+\Sigma_2-\Sigma_3+\ldots-\Sigma_m\right]-R \qquad (8)$$

où m est un nombre impair:

$$m\leq r$$

et où l'expression $1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots - \Sigma_m$ est calculée au moyen du schéma:



Nous pouvons, dans le cas spécial

$$m = r,$$

calculer cette expression:

$$1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots + (-1)^r \Sigma_r =$$

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\left(1 - \frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) = 1 - \sum_{a \le r} \frac{1}{p_a} + \sum_{a \le r}\sum_{b<a} \frac{1}{p_a p_b} - \ldots$$

où r peut être pair ou impair. Le nombre des termes est dans ce cas 2^r. Nous obtenons alors la formule

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > \frac{x}{D}\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - 2^r \qquad (9)$$

Dans le cas général nous voulons déterminer une limite inférieure de l'expression

$$1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots - \Sigma_m$$

Nous pouvons, comme plus haut, démontrer que:

$$\begin{aligned} \sigma &= \Sigma_1 \\ \sigma \cdot \Sigma_1 &> 2\Sigma_2 \\ \sigma \cdot \Sigma_2 &> 3\Sigma_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \sigma \cdot \Sigma_{m-1} &> m\Sigma_m \end{aligned}$$

d'où

$$\sigma^m > m!\, \Sigma_m$$

Nous en concluons:

$$\Sigma_m < \frac{\sigma}{m} \Sigma_{m-1} \qquad (10)$$

et

$$\Sigma_m < \frac{\sigma^m}{m!} < \left(\frac{e\sigma}{m}\right)^m \qquad (11)$$

en nous servant de la formule de Stirling:

$$m! = \left(\frac{m}{e}\right)^m (\sqrt{2\pi m} + \theta) \qquad -1 < \theta < 1$$

Ecrivons maintenant la formule (8) d'une autre manière:

$$N(D, x, p_1, p_2, \dots p_r) > \frac{x}{D}\left[(1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \dots - \Sigma_m + \Sigma_{m+1} - \dots + \right.$$
$$\left. + (-1)^r \Sigma_r) - (\Sigma_{m+1} - \Sigma_{m+2} + \dots - (-1)^r \Sigma_r)\right] - R$$

Nous connaissons la valeur de la première parenthèse sous forme de produit.

La deuxième parenthèse est composée d'une série de termes décroissants, quand

$$m + 2 > \sigma$$

et alors elle a une valeur plus petite que Σ_{m+1}, qui est plus petite que $\left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}$.

Nous pouvons donc écrire:

$$N(D, x, p_1, p_2, \dots p_r) > \frac{x}{D}\left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - \left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}\right] - R$$

Il n'est pas difficile déterminer la valeur de R:[1]

$$R = 1 + \binom{r}{1} + \binom{r}{2} + \dots + \binom{r}{m} < 1 + r + r^2 + \dots + r^m < r^{m+1}$$

Nous obtenons alors la formule:

$$N(D, x, p_1, p_2, \dots p_r) > \frac{x}{D}\left[\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{e\sigma}{m+1}\right)^{m+1}\right] - r^{m+1} \qquad (12)$$

quand

$$m + 2 > \sigma = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_r}$$

Cette formule est plus utile que (9), la croissance de r^{m+1} n'étant pas si grande que celle de 2^r. Mais encore la croissance du terme R est trop grande pour notre but.

---

1 Voir p. ex. Landau: Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, p. 67.

§ 4.

Nous voulons pour cette raison choisir les domaines ω d'une autre manière, écartant tous termes à droite des lignes verticales, comme dans l'exemple 3 (page 11).

D'abord nous écartons dans la formule (3) tous termes positifs à droite d'une ligne verticale. Nous obtenons alors la formule suivante:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) \geq N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b \leq t}} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1, p_2, \ldots p_{b-1}) \qquad (13)$$

où t est un nombre entier, plus petit que r.

Les termes de la dernière somme peuvent être calculés au moyen de la même formule, d'où l'on tire:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) \geq N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < t}} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x) - \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < t}} \sum_{\substack{c < b \\ c < t}} N(D \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c, x) + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b \leq t}} \sum_{\substack{c < b \\ c \leq t}} \sum_{\substack{d < c \\ d \leq u}} N(D \cdot p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d, x, p_1, p_2, \ldots p_{d-1})$$

où u est un nombre entier, plus petit que t.

En continuant, et en nous servant de

$$N(d, x) = \frac{x}{d} + \theta \qquad -1 \leq \theta \leq 1$$

nous obtenons à la fin la formule:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) \geq \frac{x}{D} \Bigg[1 - \sum_{a \leq r} \frac{1}{p_a} + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < t}} \frac{1}{p_a \cdot p_b} - \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < t}} \sum_{\substack{c < b \\ c < t}} \frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c} + \\ + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b \leq t}} \sum_{\substack{c < b \\ c \leq t}} \sum_{\substack{d < c \\ d < u}} \frac{1}{p_a \, p_b \, p_c \, p_d} - \ldots \Bigg] - R \qquad (14)$$

ou plus brièvement:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > \frac{x}{D} [1 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \ldots - S_{2n-1}] - R \qquad (14')$$

où l'expression

$$E_n = 1 - S_1 + S_2 - S_3 + \ldots - S_{2n-1}$$



est calculée au moyen du schéma en forme d'escalier:

$$
\begin{array}{l}
\overbrace{\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}}^{\sigma_n}+\overbrace{\frac{1}{p_w}+\cdots+\frac{1}{p_{u-1}}}^{\sigma_{n-1}}+\overbrace{\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}}}^{\sigma_2}+\overbrace{\frac{1}{p_t}+\cdots+\frac{1}{p_r}}^{\sigma_1} \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}+\frac{1}{p_w}+\cdots+\frac{1}{p_{u-1}}+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}} \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}+\frac{1}{p_w}+\cdots+\frac{1}{p_{u-1}}+\frac{1}{p_u}+\cdots+\frac{1}{p_{t-1}} \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}+\frac{1}{p_w}+\cdots+\frac{1}{p_{u-1}}+ \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}+\frac{1}{p_w}+\cdots+\frac{1}{p_{u-1}} \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}} \\
\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_{w-1}}
\end{array}
\qquad (2n-1) \text{ lignes}
$$

Nous choisissons les nombres premiers du schéma comme des nombres premiers successifs, situés dans l'intérieur des intervalles suivantes:

$$p_r^{\frac{1}{\alpha^n}} \quad p_1 \qquad\qquad p_r^{\frac{1}{\alpha^{n-1}}} \quad \cdots\cdots \quad p_r^{\frac{1}{\alpha^2}} \qquad\qquad p_r^{\frac{1}{\alpha}} \qquad\qquad p_r$$

où $\alpha > 1$.

Nous nous servons des formules de MERTENS[1], en les donnant la forme suivante:

$$\sum_2^x \frac{1}{p} = \log\log x + 0{,}261\cdots + \theta\frac{5}{\log x} \qquad -1 < \theta < 1$$

$$\prod_2^x \left(1-\frac{1}{p}\right) = e^{\frac{7\theta}{\log x}}\,\frac{0{,}561\cdots}{\log x} \qquad -1 < \theta < 1$$

où log désigne le logarithme népérien.

Nous en concluons:

$$\sum_x^{x^\alpha} \frac{1}{p} = \log\alpha + \theta\,\frac{5\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\log x}$$

$$\prod_x^{x^\alpha}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\alpha}\,e^{\frac{7\theta}{\log x}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}$$

[1] Voir: „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ B. 78, 1874 ou: Landau, Handbuch I, pag. 201.

Mais alors nous pouvons choisir p_1 suffisamment grand pour que:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_r} < \log \alpha_0 \\
\sigma_2 &= \frac{1}{p_u} + \dots + \frac{1}{p_{t-1}} < \log \alpha_0 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\sigma_n &= \frac{1}{p_l} + \dots + \frac{1}{p_{w-1}} < \log \alpha_0
\end{aligned} \tag{15}$$

et

$$\begin{aligned}
\pi_1 &= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) > \frac{1}{\alpha_0} \\
\pi_2 &= \left(1 - \frac{1}{p_u}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_{t-1}}\right) > \frac{1}{\alpha_0} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\pi_n &= \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_{w-1}}\right) > \frac{1}{\alpha_0}
\end{aligned} \tag{16}$$

quand

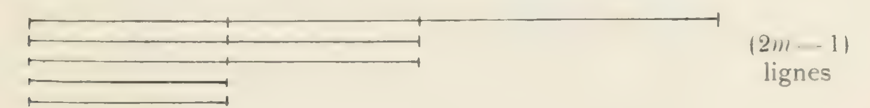
$$\alpha_0 > \alpha$$

Nous supposons spécialement

$$\log \alpha_0 < 1$$

Nous chercherons à réaliser une calculation successive des sommes, auxquelles les schémas en forme d'escalier donnent lieu.

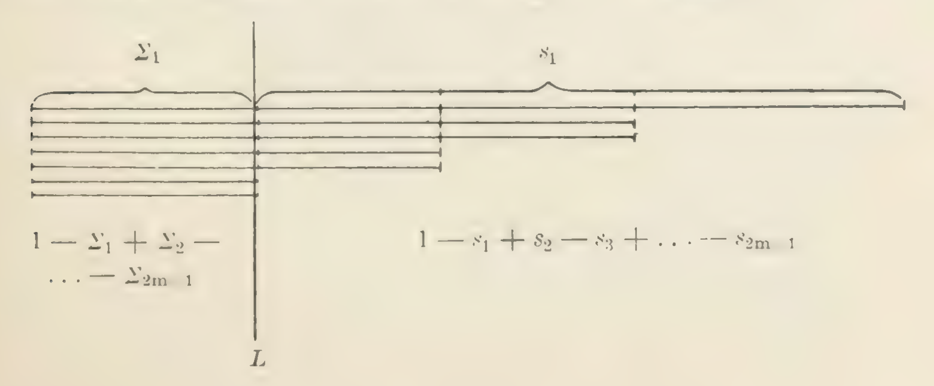
Supposons que nous avons calculé au moyen du schéma:



donnant lieu à l'expression:

$$E_m = 1 - s_1 + s_2 - s_3 + \dots - s_{2m-1}$$

Nous ajouterons alors $2m + 1$ lignes à gauche, (qui prises seules donnent lieu à l'expression $1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \dots - \Sigma_{2m+1}$):



La somme $\Sigma \frac{1}{p_a}$ est maintenant égale à $\Sigma_1 + s_1$. Nous voyons aussi que la somme nouvelle $\Sigma\Sigma \frac{1}{p_a \cdot p_b}$ est égale à $\Sigma_2 + s_1 \cdot \Sigma_1 + s_2$ en étudiant les trois cas possibles:

p_a se trouve à gauche de L et p_b à gauche de L (Σ_2)
p_a » » » droite » L » p_b » gauche » L $(s_1 \cdot \Sigma_1)$
p_a » » » droite » L » p_b » droite » L (s_2)

En général nous pouvons calculer l'expression nouvelle E_{m+1} de la manière suivante:

$$\begin{aligned}
E_{m+1} = 1 &- (\Sigma_1 + s_1) \\
&+ (\Sigma_2 + s_1 \cdot \Sigma_1 + s_2) \\
&- (\Sigma_3 + s_1 \cdot \Sigma_2 + s_2 \cdot \Sigma_1 + s_3) \\
&+ \cdots\cdots\cdots \\
&- \cdots\cdots\cdots \\
&- (\Sigma_{2m-1} + s_1 \Sigma_{2m-2} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-3} + \ldots + s_{2m-2} \cdot \Sigma_1 + s_{2m-1}) \\
&+ (\Sigma_{2m} + s_1 \cdot \Sigma_{2m-1} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-2} + \ldots + s_{2m-2} \Sigma_2 + s_{2m-1} \Sigma_1) \\
&- (\Sigma_{2m+1} + s_1 \cdot \Sigma_{2m} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-1} + \ldots + s_{2m-2} \cdot \Sigma_3 + s_{2m-1} \cdot \Sigma_2)
\end{aligned}$$

Comparons cette expression avec le produit suivant:

$$\begin{aligned}
&(1 - \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3 + \ldots - \Sigma_{2m+1} + \\
&+ \Sigma_{2m+2} - \ldots \pm \Sigma_\nu) \cdot (1 - s_1 + s_2 - s_3 + \ldots - s_{2m-1}) = \\
1 &- (\Sigma_1 + s_1) \\
&+ (\Sigma_2 + s_1 \Sigma_1 + s_2) \\
&- (\Sigma_3 + s_1 \Sigma_2 + s_2 \Sigma_1 + s_3) \\
&+ \cdots\cdots\cdots \\
&- \cdots\cdots\cdots \\
&- (\Sigma_{2m-1} + s_1 \cdot \Sigma_{2m-2} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-3} + \ldots + s_{2m-2} \Sigma_1 + s_{2m-1}) \\
&+ (\Sigma_{2m} + s_1 \Sigma_{2m-1} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-2} + \ldots + s_{2m-2} \cdot \Sigma_2 + s_{2m-1} \cdot \Sigma_1) \\
&- (\Sigma_{2m+1} + s_1 \cdot \Sigma_{2m} + s_2 \cdot \Sigma_{2m-1} + \ldots + s_{2m-2} \cdot \Sigma_3 + s_{2m-1} \Sigma_2) \\
&+ (\Sigma_{2m+2} + s_1 \cdot \Sigma_{2m+1} + s_2 \cdot \Sigma_{2m} + \ldots + s_{2m-2} \cdot \Sigma_4 + s_{2m-1} \Sigma_3)
\end{aligned}$$

Le premier facteur contient autant de termes que possible, c'est-à-dire ν est égal au nombre des termes dans Σ_1. Le produit contient, comme on voit, tous les termes de E_{m+1} et d'ailleurs une suite de parenthèses, dont

les valeurs d'après (10) sont décroissantes, puisque $\Sigma_1 = \sigma_{m+1} < \log \alpha_0 < 1$, et ayant des signes alternatifs. Nous en concluons:

$$E_{m+1} > \pi_{m+1}\cdot E_m - (\Sigma_{2m+2} + s_1\cdot\Sigma_{2m+1} + s_2\cdot\Sigma_{2m} + \dots + s_{2m+2}\cdot\Sigma_1 + s_{2m+1}\cdot\Sigma_3) \tag{17}$$

Nous pouvons déterminer une limite supérieure pour la dernière parenthèse. Elle est une somme des produits différents de $(2m + 2)$ nombres $\frac{1}{p}$, qui se trouvent tous dans les deux sommes s_1 et Σ_1. Mais nous obtenons la somme de tous les produits possibles de cette forme en formant la somme

$$(s_1 + \Sigma_1)_{2m+2}$$

en calculant au moyen du schéma:

Σ_1 s_1

[schéma : $(2m + 2)$ lignes]

Mais d'après (11) et (15) nous obtenons:

$$(s_1 + \Sigma_1)_{2m+2} < \left(\frac{e\,(s_1 + \Sigma_1)}{2m + 2}\right)^{2m+2} < \left(\frac{e\,(m + 1)\log \alpha_0}{2\,(m + 1)}\right)^{2m+2} = \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^{2m+2}$$

Notre parenthèse (dans 17) est alors plus petite encore, d'où nous concluons que

$$E_{m+1} > \pi_{m+1}\cdot E_m - \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^{2m+2} \tag{18}$$

Nous obtenons alors spécialement, puisque $E_1 = 1 - s_1$

$$E_1 > 1 - \log \alpha_0$$

$$E_2 > \pi_2\cdot E_1 - \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^4 > \pi_2\left(1 - \log \alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^4\right)$$

en nous servant de (16). En continuant de la même manière, nous obtenons à la fin:

$$E_n > \pi_2\cdot\pi_3 \dots \pi_n\left(1 - \log \alpha_0 - \alpha_0\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^4 - \right.$$
$$\left. - \alpha_0^2\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^6 \dots - \alpha_0^{n-1}\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^{2n}\right)$$

ou, puisque $\pi_1 < 1$:

$$E_n > \pi_1\cdot\pi_2 \dots \pi_n\left(1 - \log \alpha_0 - \frac{\alpha_0\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^4}{1 - \alpha_0\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^2}\right)$$

quand $\quad \alpha_0\left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^2 < 1.$

Choisissons spécialement

$$\alpha = \frac{3}{2} \text{ et } \alpha_0 = 1{,}51$$

Nous obtenons alors:

$$E_n > 0{,}3\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \tag{19}$$

Etudions le nombre (R) de termes dans E_n en formant le produit suivant:

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_r}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_{t-1}}\right)^2$$

$$\left(1-\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_{u-1}}\right)^2\ldots\left(1-\frac{1}{p_2}-\ldots-\frac{1}{p_{w-1}}\right)^2$$

Ce produit contient tous les termes de E_n et plus. Le nombre $(r+1)$ de termes dans le premier facteur est plus petit que p_r, et dans le deuxième plus petit que $p_r^{\frac{1}{\alpha}}$ etc. Nous obtenons le nombre des termes du produit en substituant tous les termes $-\frac{1}{p}$ par $+1$, d'où nous concluons:

$$R < p_r \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha}} \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha^2}} \ldots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = p_r^5$$

Nous pouvons alors donner à (14') la forme suivante:

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) >$$

$$\frac{x}{D} 0{,}3\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_r}\right) - p_r^5 \tag{20}$$

Cette formule est valable pour tous nombres premiers successifs $p_1, p_2, \ldots p_r$ quand

$$p_1 \geqq p_e$$

où p_e désigne un nombre premier déterminable.

Supposons spécialement

$$p_1 = p_{e+1}$$

le nombre premier $(e+1)$-ième.

Quand il s'agit de calculer $N(D, x, 2, 3, \ldots p_e, p_1, \ldots p_r)$, nous pouvons ajouter à notre schéma (pag. 18) le suivant:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_e}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_e}$$

. . . .

. . . .

. . . .

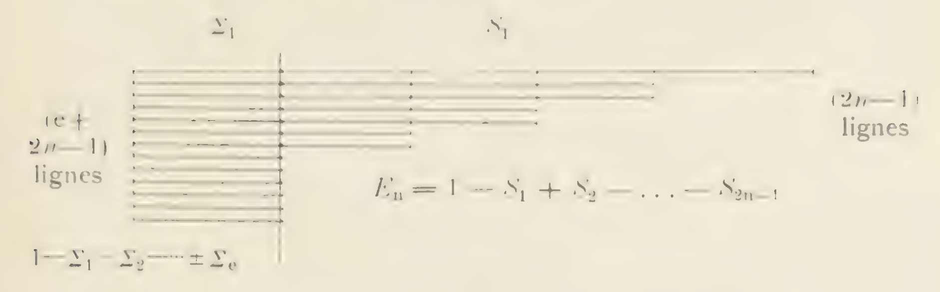
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p_e}$$

qui donne lieu à l'expression

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_e}\right)=1-\Sigma_1+\Sigma_2-\cdots\pm\Sigma_e$$

contenant 2e termes, quand le nombre des lignes sont $\geq e$.

Nous obtenons alors le schema nouveau:



dannant lieu à l'expression nouvelle E_{n+1}:

$$
\begin{aligned}
E_{n+1} = 1 &- (\Sigma_1 + S_1) \\
&+ (\Sigma_2 + S_1\cdot\Sigma_1 + S_2) \\
&- \cdots \\
&+ \cdots \\
&- \cdots \\
&+ (\Sigma_e + S_1\cdot\Sigma_{e-1} + S_2\,\Sigma_{e-2} + \ldots + S_e) \\
&\qquad - (S_1\cdot\Sigma_e + S_2\,\Sigma_{e-1} + \ldots + S_e\cdot\Sigma_1 + S_{e+1}) \\
&\qquad\qquad + (S_2\cdot\Sigma_e + \ldots + S_e\cdot\Sigma_2 + S_{e+1}\cdot\Sigma_1 + S_{e+2}) \\
&- \cdots \\
&\quad + \cdots \\
&\qquad - \cdots \\
&\qquad\qquad - (S_{2n-1-e}\cdot\Sigma_e + S_{2n-e}\cdot\Sigma_{e-1} + \ldots + S_{2n-1}) \\
&\qquad\qquad\qquad + (S_{2n-e}\cdot\Sigma_e + \ldots + S_{2n-1}\cdot\Sigma_1) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (S_{2n-1}\,\Sigma_e)
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
E_{n+1} &= (1-\Sigma_1+\Sigma_2-\ldots+\Sigma_e)(1-S_1+S_2-\ldots+S_{2n-1}) = \\
&= \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_e}\right)\cdot E_n
\end{aligned}
$$

où nous avons supposé e pair.

Nous obtenons alors au moyen de (19) la formule

$$
\begin{aligned}
N(D, x, 2, 3, 5, \ldots p_r) > \frac{X}{D}\cdot 0.3\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots \\
\left(1-\frac{1}{p_r}\right) - 2^e\,p_r^2
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

valable pour tous

$$r > e$$

où e désigne un nombre déterminable, en remarquant que chaque terme de $\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_e}\right)$ est multiplié par chaque terme de E_n.

Mais alors nous pouvons d'après la formule de Mertens déterminer un nombre c de manière que:

$$N(D, x, 2, 3, 5, \ldots p_r) > \frac{0,168\, x}{D \log p_r} - 2^e\, p_r^5 \qquad (22)$$

pour tous

$$r \geq c$$

où c désigne un nombre déterminable ($c \geqq e$).

Si nous choisissons $D = 1$ et

$$p_r = p\left(\sqrt[6]{x}\right)$$

c'est-à-dire le plus grand nombre premier au-dessous de $\sqrt[6]{x}$:

$$p_r \leqq \sqrt[6]{x} < p_{r+1}$$

nous obtenons spécialement:

$$N\left(1, x, 2, 3, \ldots p\left(\sqrt[6]{x}\right)\right) > \frac{1,008\, x}{\log x} - 2^e \cdot x^{\frac{5}{6}} > \frac{x}{\log x}$$

pour tous $x > x_0$.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant:

Quand sur x nombres consécutifs, nous effaçons les termes de deux en deux, puis de trois en trois, etc., finalement de $p(\sqrt[6]{x})$ en $p(\sqrt[6]{x})$, il restera toujours plus que $\frac{x}{\log x}$ termes, si $x > x_0$.

Les points de départ des effacements peuvent être choisi à souhait. x_0 désigne un nombre déterminable.

Nous pouvons aussi déduire le théorème suivant au moyen de la formule (22):

Il existe toujours entre n et $n + \sqrt{n}$ un nombre, dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas onze, quand $n > n_0$.

Choisissons dans la formule (22)

$$D = 1 \quad x \quad \sqrt{n} \quad \text{et} \quad p_r = p\left(n^{\frac{1}{11}}\right)$$

Nous obtenons alors

$$N\left(1, \sqrt{n}, 2, 3, \ldots p\left(n^{\frac{1}{11}}\right)\right) > \frac{1,8\sqrt{n}}{\log n} - 2^e \cdot n^{\frac{5}{11}} > 1$$

pour tous $n > n_0$.

Quand nous effaçons dans l'intervalle $n - n + \sqrt{n}$ tous les deux, tous les trois, etc. jusqu'à tous les $p(n^{\frac{1}{11}})$ nombres, il restera donc au moins un nombre. Nous choisissons o comme point de départ des effacements. Les nombres non-effacés ne peuvent pas être composés de 12 ou plus facteurs premiers, car alors il faudrait qu'un de ces facteurs soit plus petit que $\sqrt[12]{n+\sqrt{n}}$, et donc plus petit que $\sqrt[11]{n}$ pour tous $n > n_0$. Mais tous ces nombres, étant divisibles par 2, 3, ... ou $p(n^{\frac{1}{11}})$ sont effacés.

§ 5.

Nous avons supposé que les nombres

$$2, 3, 5, \ldots p_r$$

dans la formule (21) soient des nombres premiers *successifs*.

Nous généralisons facilement en étudiant les nombres premiers non-successifs

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots q_{\gamma-1}, q_{\gamma+1}, \ldots q_r$$

formant une partie des nombres premiers successifs

$$q_1, q_2, q_3, \ldots q_{\alpha-1}, q_\alpha, q_{\alpha+1} \ldots q_{\gamma-1}, q_\gamma, q_{\gamma+1} \ldots q_r \text{ où } q_1 = 2 \text{ etc}$$

et obtenons comme plus haut (voir 21):

$$N(D, x, q_1, q_2, \ldots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots q_r) > \frac{X}{D} \cdot 0{,}3 \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \ldots$$
$$\left(1 - \frac{1}{q_{\alpha-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{q_{\alpha+1}}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right) - 2^e \cdot q_r^5$$

ou

$$N(D, x, q_1, q_2, \ldots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots q_r) >$$
$$\frac{X}{D} \cdot 0{,}3 \frac{\left(1 - \frac{1}{q_1}\right)\left(1 - \frac{1}{q_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_r}\right)}{\left(1 - \frac{1}{q_\alpha}\right) \ldots \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\gamma}\right)} - 2^e q_r^5$$

Nous en concluons:

$$N(D, x, q_1, q_2, \ldots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \ldots q_r) > \frac{0{,}168\, x}{D \cdot \log q_r} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{q_\alpha}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{q_\gamma}\right)} - 2^e \cdot q_r^5$$

Etudions maintenant une série arithmétique, s'étendant de o à x:

$$\Delta \qquad \Delta + D \qquad \Delta + 2D \qquad \Delta + 3D \qquad \Delta + 4D \ldots$$

Δ et D étant premier entre eux. Soit

$$D = q_\alpha^a \ldots q_\gamma^c$$

Effaçons maintenant les nombres étant divisibles par

$$q_1, q_2, \dots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots q_{\gamma-1}, q_{\gamma+1}, \dots q_r$$

en choisissant

$$q_r = q(\sqrt[6]{x})$$

Nous obtenons

$$N(D, x, q_1, q_2, \dots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots q_r) > \frac{0{,}168\, x}{\varphi(D) \log q_r} - 2^e \cdot q_r^5 >$$

$$\frac{1{,}008\, x}{\varphi(D) \log x} - 2^e\, x^{\frac{5}{6}} > \frac{1}{\varphi(D)} \frac{x}{\log x}$$

pour tous

$$x > x_0$$

Les nombres non-effacés sont indivisibles par

$$q_1, q_2, \dots q_{\alpha-1}, q_{\alpha+1}, \dots q_{\gamma-1}, q_{\gamma+1}, \dots q_r$$

mais ils sont aussi indivisibles par

$$q_\alpha, \dots q_\gamma$$

puisque $\varDelta$ et D sont premiers entre eux. Les nombres non-effacés contiennent donc cinq facteurs premiers ou moins.

Nous en déduissons le théorème suivant, analogue á celui de DIRICHLET:

Chaque série arithmétique, dont le premier terme et la différence sont premiers entre eux, contient une infinité de termes, dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas cinq.

§ 6.

Etudions maintenant le *crible de Merlin*, où l'on efface *doublement* tous les trois, tous les cinq, etc. jusqu'à tous les p_r nombres. En généralisant, nous étudions les séries arithmétiques suivantes:

$\varDelta$	$\varDelta+D$	$\varDelta+2D$	$\varDelta+3D$	$\varDelta+4D$ ......
a_1	a_1+p_1	a_1+2p_1	a_1+3p_1	a_1+4p_1 ....
b_1	b_1+p_1	b_1+2p_1	b_1+3p_1	b_1+4p_1 ....
a_2	a_2+p_2	a_2+2p_2	a_2+3p_2	a_2+4p_2 ....
b_2	b_2+p_2	b_2+2p_2	b_2+3p_2	b_2+4p_2 ....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
.....	.....	.....	.....	.....
a_{r-1}	$a_{r-1}+p_{r-1}$	$a_{r-1}+2p_{r-1}$	$a_{r-1}+3p_{r-1}$	$a_{r-1}+4p_{r-1}$ .....
b_{r-1}	$b_{r-1}+p_{r-1}$	$b_{r-1}+2p_{r-1}$	$b_{r-1}+3p_{r-1}$	$b_{r-1}+4p_{r-1}$ .....
a_r	a_r+p_r	a_r+2p_r	a_r+3p_r	a_r+4p_r ....
b_r	b_r+p_r	b_r+2p_r	b_r+3p_r	b_r+4p_r ....

Toutes les lettres sont définies comme dans § 2. D'ailleurs nous supposons

$$a_1 < b_1$$

et

$$p_1 \geq 3$$

Désignons par

$$P(\Delta, D, x, a_1, b_1, p_1, a_2, b_2, p_2, \ldots a_r, b_r, p_r)$$

ou plus brièvement par

$$P(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r)$$

le nombre des termes de la série première, qui sont différents de tous les termes des autres séries. Nous déduissons comme plus haut la formule fondamentale:

$$\begin{aligned} P(\Delta, x, a_1, b_1, p_1, \ldots a_r, b_r, p_r) &= P(\Delta, D, x, a_1, b_1, p_1, \ldots a_{r-1}, b_{r-1}, p_{r-1}) \\ &- P(\Delta', D p_r, x, a_1, b_1, p_1, \ldots a_{r-1}, b_{r-1}, p_{r-1}) \\ &- P(\Delta'', D p_r, x, a_1, b_1, p_1, \ldots a_{r-1}, b_{r-1}, p_{r-1}) \end{aligned}$$

ou plus brièvement:

$$\begin{aligned} P(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) &= P(D, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1}) \\ &- 2 P(D \cdot p_r, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1}) \end{aligned} \qquad (23)$$

Il ne peut donner lieu à aucune malentendue, que nous avons écri $2\,P(D\,p_r, x, p_1, p_2, \ldots p_{r-1})$ quand on se souvient qu'il désigne une somme de deux expressions de la forme $P(\Delta, D \cdot p_r, x, a_1, b_1, p_1, \ldots a_{r-1}, b_{r-1}, p_{r-1})$.

Nous obtenons comme auparavant au moyen de (23) la formule générale, analogue à (5)

$$\begin{aligned} \frac{D}{x} P(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > 1 &- \sum_{a \leq r} \frac{2}{p_a} + \sum_{\omega_1}\sum \frac{2^2}{p_a\,p_b}\left(1 - \sum_{c < b} \frac{2}{p_c}\right) \\ &+ \sum_{\omega'_1}\sum \sum_{\omega_2}\sum \frac{2^4}{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d}\left(1 - \sum_{e < d} \frac{2}{p_e}\right) + \ldots - \frac{R \cdot D}{x} \end{aligned} \qquad (24)$$

où $\qquad \omega_1{}' \lesseqgtr \omega_1 \qquad$ etc.

R désigne le nombre des termes de la forme $\pm \frac{1}{n}$ dans la formule, $\left(\text{où } \frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \text{ etc.}\right)$. Nous avons supposé

$$p_1 \geq 3$$

Du reste les désignations sont les mêmes comme dans la formule (5).

Nous pouvons aussi donner à formule (24) la forme suivante, en supposant spécialement $p_1 = 3,\ p_2 = 5,\ p_3 = 7$ etc.:

$$
\begin{aligned}
P(D, x, 3, 5, 7, \ldots p_r) > \frac{x}{D} \Bigg[& 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \ldots - \frac{2}{p_r} \\
& + \frac{4}{5 \cdot 3} \\
& + \frac{4}{7 \cdot 3} + \frac{4}{7 \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) \\
& + \frac{4}{11 \cdot 3} + \frac{4}{11 \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{11 \cdot 7}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\ \quad + \frac{4}{5 \cdot 3} \end{array}\right) \\
& + \frac{4}{13 \cdot 3} + \frac{4}{13 \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{13 \cdot 7}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\ \quad + \frac{4}{5 \cdot 3} \end{array}\right) + \frac{4}{13 \cdot 11}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \\ \quad + \frac{4}{5 \cdot 3} \\ \quad + \frac{4}{7 \cdot 3} + \frac{4}{7 \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) \end{array}\right) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + \frac{4}{p_r \cdot 3} + \frac{4}{p_r \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{p_r \cdot 7}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} \\ \quad + \frac{4}{5 \cdot 3} \end{array}\right) + \frac{4}{p_r \cdot 11}\left(\begin{array}{l} 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} \\ \quad + \frac{4}{5 \cdot 3} \\ \quad + \frac{4}{7 \cdot 3} + \frac{4}{7 \cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) \end{array}\right) + \ldots \Bigg] - h
\end{aligned}
\tag{25}
$$

où l'on peut écarter chaque terme, (la parenthèse suivante comprise), qui suit au signe $+$.

Nous donnons un exemple en étudiant les séries arithmétiques suivantes. s'étendant de 0 à 11776

	1	3	5	7	9	11	13	15	...	11769	11771	11773	11775
{	0	3	6	9	12	15	...	11769	11772	11775			
	1	4	7	10	13	...	11770	11773	11776				
{	0	5	10	15	...	11770	11775						
	1	6	11	16	...	11771	11776						
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
{	0	19	...	11761									
	15	...	11757	11776									

Les points de départ des effacements sont 0 et 11776 (voir page 3). Nous obtenons au moyen de (25), en observant que

$$a_i \gtrless b_i$$

puisque $11776 = 2^9 \cdot 23$ est indivisible par $3, 5, 7, \ldots 19$:

$$P(2,\ 11776,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 19) > \frac{11776}{2}\Bigg[1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \frac{2}{7} - \frac{2}{11} - \frac{2}{13} - \frac{2}{17} - \frac{2}{19}$$

$$+ \frac{1}{5\cdot 3}$$

$$+ \frac{1}{7\cdot 3} + \frac{1}{7\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$+ \frac{4}{11\cdot 3} + \frac{1}{11\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \frac{4}{13\cdot 7}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{5\cdot 3}\right)$$

$$+ \frac{4}{13\cdot 3} + \frac{4}{11\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right) - \frac{4}{13\cdot 7}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{4}{5\cdot 3}\right)$$

$$+ \frac{1}{17\cdot 3} + \frac{1}{17\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right)$$

$$+ \frac{4}{19\cdot 3} + \frac{4}{19\cdot 5}\left(1 - \frac{2}{3}\right)\Bigg] - R$$

où

$$R = 1 + 2\cdot 7 + 4\cdot 6 + 12\cdot 5 + 4\cdot 10 + 16\cdot 2 = 171$$

d'où

$$P(2,\ 11776,\ 3,\ 5,\ \ldots\ 19) > 296 - 171 = 125$$

Les nombres (t) non-effacés de la première série, dont le nombre est plus grand que 125, ont la propriété suivante: t et $11776 - t$ sont indivisibles par 2, 3, 5, ... 19. Ils ne peuvent pas être composés de trois facteurs pemiers ou plus, car alors il faudrait qu'un de ces facteurs fût plus petit que $\sqrt[3]{11776} < 22{,}9$.

On peut alors écrire le nombre 11776 comme la somme de deux nombres, dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas 2, en 125 manières différentes ou plus.

Je n'ai pas pourtant réussi à donner un exemple de la justesse du théorème de Goldbach par cette méthode.

Nous verrons pourtant, que nous pourrons déduire des résultats importants au moyen de la formule (24), le procédé étant tout à fait analogue à celui employé plus haut.

Il faut seulement partout remplacer $\frac{1}{p_i}$ par $\frac{2}{p_i}$.

Nous calculons au moyen du même schéma en forme d'éscalier comme à la page 18 en remplaçant $\frac{1}{p_i}$ par $\frac{2}{p_i}$. Il faut alors remplacer les sommes et les produits considérés à la page 19 par les suivantes:

$$\sigma_1 = \frac{2}{p_t} + \ldots + \frac{2}{p_r} < 2 \log \alpha_0 \qquad \text{etc.}$$

et

$$\Pi_1 = \left(1 - \frac{2}{p_t}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right) < \frac{1}{\alpha_0^2} \qquad \text{etc.}$$

en nous servant de la formule suivante:

$$\prod_3^x \left(1 - \frac{2}{p}\right) = e^{\frac{c\theta}{\log x}} \cdot \frac{0{,}8322 \cdots}{\log^2 x}$$

Nous supposons maintenant $2 \log \alpha_0 < 1$.

Nous déduissons la formule suivante analogue à (18):

$$E_{m+1} > \Pi_{m+1} \cdot E_m - (e \cdot \log \alpha_0)^{2m+2}$$

d'où l'on tire:

$$E_n > \Pi_1 \cdot \Pi_2 \ldots \Pi_n \left(1 - 2 \log \alpha_0 - \frac{\alpha_0^2 (e \cdot \log \alpha_0)^4}{1 - \alpha_0^2 (e \cdot \log \alpha_0)^2}\right)$$

Choisissons spécialement

$$\alpha = \frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \alpha_0 = 1{,}2501$$

Nous obtenons alors:

$$E_n > 0{,}05 \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right) \tag{26}$$

Etudions le nombre (R) de termes dans E_n en formant le produit suivant

$$\left(1 - \frac{2}{p_2} - \frac{2}{p_2} - \ldots - \frac{2}{p_r}\right) \left(1 - \frac{2}{p_1} - \frac{2}{p_2} - \ldots - \frac{2}{p_{t-1}}\right)^2$$

$$\left(1 - \frac{2}{p_1} - \frac{2}{p_2} - \ldots - \frac{2}{p_{u-1}}\right)^2 \ldots \left(1 - \frac{2}{p_1} - \frac{2}{p_2} - \ldots - \frac{2}{p_{w-1}}\right)^2$$

Ce produit contient tous les termes de E_n et plus. Le nombre $(2r+1)$ de termes dans le premier facteur est plus petit que p_r, quand $p_1 > 3$, et dans le deuxième plus petit que $p_r^{\frac{1}{\alpha}}$ etc. Nous en concluons

$$R < p_r \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha}} \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha^2}} \cdots p^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} = p_r^9$$

Nous obtenons alors la formule:

$$P(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) > \frac{x}{D} \cdot 0{,}05 \left(1 - \frac{2}{p_1}\right) \left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right) - p_r^9 \tag{27}$$

une formule qui est valable pour tous nombres premiers successifs $p_1, p_2, \ldots p_r$ quand

$$p_1 \geqq p_e$$

où p_e designe un nombre premier determinable.

Nous obtenons aussi une formule analogue à (21):

$$P(D, x, 3, 5, \dots p_r) > \frac{x}{D} \cdot 0{,}05 \left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right) - 3^e \cdot p_r^9 \quad (28)$$

valable pour tous

$$r > e$$

Nous en concluons

$$P(D, x, 3, 5, \dots p_r) > \frac{x}{D} \cdot \frac{0{,}041}{(\log p_r)^2} - 3^e \cdot p_r^9 \quad (29)$$

pour tous $r > c$

où $c \geq e$

Choisissons spécialement

$$p_r = p(x^{\frac{1}{10}})$$

Nous obtenons alors

$$P\left(D, x, 3, 5, \cdots p(x^{\frac{1}{10}})\right) > \frac{0{,}41\, x}{D(\log x)^2} - 3^e \cdot x^{\frac{9}{10}} > \frac{0{,}4 \cdot x}{D(\log x)^2} \quad (30)$$

por tous

$$x > x_0$$

En supposant $D = 1$ nous pouvons donc énoncer le théorème suivant: *Quand nous effaçons doublement parmi x termes, tous les trois, tous les cinq etc. jusquà tous les $p(x^{\frac{1}{10}})$ il restera toujours plus que $\frac{0{,}4\, x}{(\log x)^2}$ termes si $x > x_0$.*

Nous avons supposé

$$a_i \neq b_i$$

c'est-à-dire qu'aucun des effacements doubles ne soit réduit à un seul. Quand il s'agit de déterminer les décompositions goldbachiennes du nombre

$$x = 2^s \cdot p_\alpha^t \cdots p_\gamma^v$$

on voit pourtant que

$$a_\alpha = b_\alpha$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_\gamma = b_\gamma$$

Mais la limite inférieure de P ne sera naturellement plus petite, quand on réduit les effacements (comparez § 5). Il faut alors remplacer $\frac{2}{p_\alpha}$ par $\frac{1}{p_\alpha}$ et $\frac{2}{p_\gamma}$ par $\frac{1}{p_\gamma}$. Nous obtenons alors la nouvelle limite inférieure de P:

$$\frac{0{,}4\,x}{D(\log x)^2}\,\frac{\left(1-\frac{1}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_\gamma}\right)}{\left(1-\frac{2}{p_\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{p_\gamma}\right)} > \frac{0{,}4\,x}{D\cdot(\log x)^2}$$

Nous en concluons, comme à la page 29, en choisissant $D = 2$ le théorème suivant, analogue à celui de GOLDBACH:

On peut écrire chaque nombre pair x, plus grand que x_0, comme la somme de deux nombres, dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas neuf.

x_0 désigne un nombre déterminable.

Les facteurs premiers peuvent être différents ou non.

Nous pouvons aussi déduire le théorème suivant:

Il existe une infinité des paires de nombres, ayant la différence 2, dans la classe des nombres, dont le nombre de facteurs premiers ne surpasse pas neuf.

§ 7.

Nous pouvons aussi déterminer une *limite supérieure* du nombre des nombres, qui restent non-effacés en employant les cribles d'Eratosthène et de Merlin.

Nous nous servirons de l'inégalité suivante:

$$N(\Delta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_r, p_r, \ldots a_n, p_n) \leqq N(\Delta, D, x, a_1, p_1, \ldots a_r, p_r)$$

ou plus brièvement

$$N(D, x, p_1, p_r, \ldots p_n) \leqq N(D, x, p_1, \ldots p_r) \tag{31}$$

où

$$r < n$$

Nous nous servirons aussi de la formule

$$N(D, x, p_1, p_2, \ldots p_r) = N(D, x) - \sum_{a \leq r} N(D \cdot p_a, x) + \sum_{a \leq r} \sum_{b < a} N(D \cdot p_a \cdot p_b, x, p_1 \ldots p_{b-1}) \tag{3'}$$

Pour évaluer les termes de la dernière somme, nous nous servirons de (31) et de la même formule (3'). En continuant nous obtenons la formule, analogue à (14):

$$N(D, x, p_1, \ldots p_r) < \frac{x}{D}\Bigg[1 - \sum_{a \leq r} \frac{1}{p_a} + \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < r}} \frac{1}{p_a \cdot p_b} - \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < r}} \sum_{\substack{c < b \\ c < t}} \frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c}$$

$$+ \sum_{a \leq r} \sum_{\substack{b < a \\ b < r}} \sum_{\substack{c < b \\ c < t}} \sum_{\substack{d < c \\ d < t}} \frac{1}{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d} - \ldots\Bigg] + R \tag{32}$$

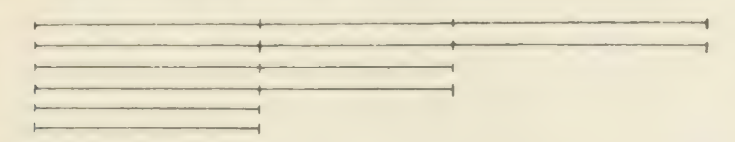
ou plus brievement:

$$N(D, r, p_1 \ldots p_r) < \frac{t}{D}\left|1 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \ldots + S_{2n}\right| + R$$

où l'expression

$$E_n = 1 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 - \ldots + S_{2n}$$

est calculée au moyen du schéma:



En employant la même méthode comme auparavant, nous obtenons:

$$E_{m+1} < H_{m+1}\, E_m + \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^{2m+3}$$

et spécialement

$$E_1 < H_1 + \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^3$$

d'où

$$E_2 < H_1\, H_2 \left[1 + \alpha_0 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^3 + \alpha_0^2 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^5\right]$$

En continuant nous obtenons à la fin

$$E_n < H_1 \cdot H_2 \cdot H_3 \cdots H_r \left[1 + \alpha_0 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^3 + \alpha_0^2 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^5 + \alpha_0^3 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^7 + \cdots\right]$$

ou

$$E_n < \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)\left(1 + \frac{\alpha_0 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^3}{1 - \alpha_0 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^2}\right) \qquad (33)$$

quand

$$\alpha_0 \left(\frac{e \log \alpha_0}{2}\right)^2 < 1 \quad .$$

Choisissons spécialement

$$\alpha = \frac{3}{2} \qquad \alpha_0 = 1,51$$

Nous obtenons alors:

$$E_n < 1,505 \left(1 \ \ \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Etudions le nombre (R) de termes dans E_n en formant le produit suivant:

$$\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} - \cdots - \frac{1}{p_r}\right)^2 \left(1 \ \ \frac{1}{p_1} \ \ \frac{1}{p_2} \ \ \cdots \ \ \frac{1}{p_{t-1}}\right)^2 \cdots$$

$$\left(1 - \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} \ \ \cdots \ \ \frac{1}{p_{w-1}}\right)^2$$

Nous voyons, comme plus haut, que

$$R < p_r^2 \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha}} \cdot p_r^{\frac{2}{\alpha^2}} \cdots p_r^{\frac{2}{\alpha^n}} < p_r^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} = p_r^6$$

Nous pouvons alors donner à (32) la forme suivante

$$N(D, x, p_1, p_2, \cdots p_r) < \frac{x}{D} \cdot 1{,}505 \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) + p_r^6$$

Nous en concluons la formule

$$N(D, x, 2, 3, \cdots p_r) < \frac{x}{D} \cdot 1{,}505 \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) + 2^e p_r^6$$

valable pour tous

$$r > e$$

Mais d'après la formule de Mertens nous obtenons

$$N(D, x, 2, 3, \cdots, p_r) < \frac{0{,}9\, x}{D \log p_r} + 2^e p_r^6$$

pour tous $r > c$

où $c > e$.

Choisissons spécialement

$$p_r = p(2\sqrt[7]{x})$$

Nous en concluons

$$\sqrt[7]{x} < p_r \leq 2\sqrt[7]{x}$$

en nous servant d'un théorème célèbre de Tchebycheff.

Nous obtenons donc:

$$N(1, x, 2, 3, \cdots p(2 \cdot \sqrt[7]{x})) < \frac{6{,}5\, x}{\log x} + 2^{c+6} \cdot x^{\frac{6}{7}} < \frac{7\, x}{\log x} \tag{34}$$

pour tous

$$x > x_0$$

En nous servant de l'inégalité (31) nous obtenons:

$$N(1, x, 2, 3, \cdots p(\sqrt{x})) \leq N(1, x, 2, 3, \cdots p(\sqrt[6]{x}))$$
$$\leq N(1, x, 2, 3, \cdots p(2\sqrt[7]{x})) < \frac{7\, x}{\log x}$$

pour tous $x > x_0$.

Nous en concluons spécialement

$$\pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1 < \frac{7\, x}{\log x}$$

d'où

$$\pi(x) < \frac{7\, x}{\log x} + \sqrt{x} < \frac{8\, x}{\log x}$$

pour tous $x > x_0$, $\pi(x)$ désignant le nombre des nombres premiers au-dessous de x.

Nous obtenons aussi en comparant du théorème à la page 24:

$$\frac{x}{\log x} < N(1, x, 2, 3, \cdots p(\sqrt{x})) < \frac{7x}{\log x} \tag{35}$$

Quand nous effaçons parmi x termes tous les deux, tous les trois, etc. jusqu'à tous les $p(\sqrt{x})$, *il restera toujours N termes, où N est un nombre, situé dans l'intervalle* $\frac{x}{\log x}$, $\frac{7x}{\log x}$, *quand* $x \geq x_0$.

Etudions à la fin le crible de Merlin. Nous obtenons la formule, analogue à (33):

$$E_n < \left(1 - \frac{2}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right)\left(1 + \frac{\alpha_0^2 (e \log \alpha_0)^3}{1 - \alpha_0^2 (e \log \alpha_0)^2}\right)$$

Choisissons spécialement

$$e = 1{,}25 \qquad \alpha_0 = 1{,}2501$$

d'où l'on tire:

$$E_n < 1{,}82\left(1 - \frac{2}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right)$$

Nous en déduissons comme plus haut:

$$P(D, x, 3, 5, \cdots p_r) < \frac{x}{D} \cdot 1{,}82\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{p_r}\right) + 3^e \cdot p_r^{10}$$

ou

$$P(D, x, 3, 5, \cdots p_r) < \frac{1{,}6\, x}{D \cdot (\log p_r)^2} + 3^e \cdot p_r^{10} \tag{36}$$

pour tous

$$r > c$$

où $c = e$ (voir page 30).

Choisissons maintenant

$$p_r = p(2\sqrt[11]{x})$$

Nous obtenons alors

$$P(D, x, 2, 3, \cdots p(2\sqrt[11]{x})) < \frac{194\, x}{D \cdot (\log x)^2} + 3^{e+10}\, x^{\frac{10}{11}} < \frac{195\, x}{D \cdot (\log x)^2}$$

pour tous

$$x > x_0$$

Nous nous servons maintenant de l'inégalité:

$$P(D, x, 2, 3, \cdots p(\sqrt{x})) < P(D, x, 2, 3, \cdots p(2\sqrt[11]{x}))$$

et de l'équation:

$$Z(x) - Z(\sqrt{x} + 2) + 1 = P(2, x, 2, 3, \cdots p(\sqrt{x}))$$

où $Z(x)$ désigne le nombre des nombres premiers jumeaux au-dessous de x, et où nous avons choisi 0 et 2 comme points de départ des effacements.

Nous obtenons donc:

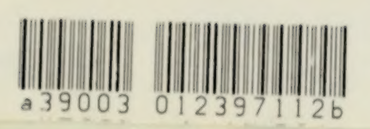
$$Z(x) < \frac{195\, x}{2 \cdot (\log x)^2} - \sqrt{x} + 2$$

ou

$$Z(x) < \frac{100\, x}{(\log x)^2} \tag{37}$$

pour tous $x > x_0$ où x_0 désigne un nombre déterminable. Ici $Z(x)$ désigne le nombre des nombres premiers jumeaux au-dessous de x.

Imprimé le 3 Février 1921.


a39003 012397112b